ΓΡΑΜΜΙΚΗ ΑΛΓΕΒΡΑ ΙΙ

No. Date 18/02/19

ΠΟΛΥΩΝΥΜΑ

Σώμα $\mathbb{F} = \{\mathbb{R}, \mathbb{Q}, \mathbb{C}, \mathbb{Z}_2, \mathbb{Z}_p$ p πρώτος$\}$

x μεταβλητή, ή t.

Πολυώνυμο $f(x) = a_0 x^0 + a_1 x^1 + a_2 x^2 + \dots + a_n x^n$ $a_i \in \mathbb{F} = \mathbb{R}$

$\mathbb{R}[x] = \{$όλες οι παραστάσεις της μορφής ↺ με πεπερασμένο πλήθος μη-μηδενικών συντελεστών$\}$

Πράξεις: 1) πρόσθεση

2) πολλαπλασιασμός

- Δύο πολυώνυμα θα είναι ίσα αν-ν οι αντίστοιχοι συντελεστές τους είναι ίσοι.

$f(x) = a_0 x^0 + \dots$ $g(x) = b_0 x^0 + \dots$ $f(x) = g(x) \Rightarrow a_i = b_i \ \forall i$

$x^0 = 1$ → παραδοχή

- Ο βαθμός $(\deg f)$ του $f(x) = a_0 x^0 + a_1 x^1 + \dots + a_n x^n + \dots$ θα είναι ίσος με n όταν $a_n \neq 0$ & $a_{n+i} = 0 \ \forall i \geq 1$

Ο a_n καλείται μεγιστοβάθμιος συντελεστής

! ΠΡΟΣΟΧΗ: Τα σταθερά πολυώνυμα $f(x) = a_0 \neq 0$ έχουν $\deg f = 0$.
Ενώ το $f(x) = 0$ Δεν έχει βαθμό.

$f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots + a_n x^n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$f(1) = a_0 + a_1 + a_2 + \dots + a_n$

[$f(x) = 0$ (έχει άπειρες ρίζες)]

Μονώνυμα: $f(x) = a_n x^n$

Πολυώνυμα: άθροισμα μονωνύμων.

• Όταν ο μεγιστοβάθμιος όρος του $f(x)$ είναι το 1, το $f(x)$ θα λέγεται μονικό

$$f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots + a_{n-1} x^{n-1} + x^n$$

$$g(x) = b_0 + b_1 x + b_2 x^2 + \dots + b_{k-1} x^{k-1} + b_k x^k =$$

$$= b_k \Big(\underbrace{\frac{b_0}{b_k} + \frac{b_1}{b_k} x + \frac{b_2}{b_k} x^2 + \dots + \frac{b_{k-1}}{b_k} x^{k-1} + x^k}_{\text{μονικό}} \Big) \quad (b_k \neq 0)$$

• ΟΡΙΣΜΟΣ: Ορίζω πρόσθεση στο $\mathbb{R}[x]$ $f(x)+g(x)=h(x)$

με $f(x) = a_0 + a_1 x + \dots + \overset{\neq 0}{a_{100}} x^{100}$, $g(x) = b_0 + b_1 x + \dots + \overset{\neq 0}{b_{1000}} x^{1000}$

$$h(x) = f(x)+g(x) = a_0 + a_1 x + \dots + a_{100} x^{100} + b_0 + b_1 x + \dots + b_{1000} x^{1000} =$$

$$= a_0 + a_1 x + \dots + a_{100} x^{100} + 0 \cdot x^{101} + 0 x^{102} + \dots + b_0 + b_1 x + \dots + b_{1000} x^{1000}$$

$$\Leftrightarrow h(x) = \gamma_0 + \gamma_1 x + \dots \quad \text{ώστε } \gamma_i = a_i + b_i$$

$$\boxed{\deg(f+g) \leq \max(\deg f, \deg g)}$$ όταν $f+g \neq 0$

πχ: $f(x) = 3x^2$, $g(x) = -3x^2$ $(f+g)(x) = 0$

• Το γινόμενο 2 πολυωνύμων $f(x)g(x) = h(x)$ είναι ένα νέο πολυώνυμο $h(x)$ με $f(x) = a_0 + a_1 x + \dots + a_n x^n + 0 x^{n+1} + \dots$

τ' $g(x) = b_0 + b_1 x + \dots + b_k x^k + 0 x^{k+1} + \dots$

τ' $h(x) = \gamma_0 + \gamma_1 x + \dots$ με $\gamma_i = \sum_{t=0}^{i} a_t b_{i-t}$

πχ: $f(x) = 3x^2 - 2x + 3$ $g(x) = -3x^2 + x + 1$

$\gamma_0 = a_0 b_0 = 3 \cdot 1 = 3$

$\gamma_1 = a_0 b_1 + a_1 b_0 = 3 \cdot 1 + (-2) \cdot 1 = 1$

$\gamma_2 = a_0 b_2 + a_1 b_1 + a_2 b_0 = 3(-3) + (-2) 1 + 3 \cdot 1 = -8$

$\Rightarrow \gamma_i = \sum_{t=0}^{i} a_t b_{i-t}$

τ' $$\boxed{\deg h = \deg(f \cdot g) = \deg f + \deg g}$$

No. Date

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ: Αν $f(x)=c$ το σταθερό πολυώνυμο, τότε $f(x)g(x)=cg(x)$, δηλ. το σημειακό γινόμενο το οποίο έχω ορίσει στους Δ.Χ. $\mathbb{R}_k[x]$ ή $\mathbb{R}_\infty[x]=\mathbb{R}[x]$
Άρα το $\mathbb{R}[x]$ δεν είναι απλά Δ.Χ. γιατί ορίζεται και το γινόμενο 2 τυχαίων πολυωνύμων, είναι δακτύλιος.